فصل ۵ کاربرد مشتق

برای تعیین یکنوایی تابع پیوسته $f(x)$ (صعودی یا نزولی بودن تابع)، ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم و تابع مشتق را تعیین علامت می‌کنیم در بازه‌هایی که مشتق مثبت باشد، یعنی تابع صعودی است و در بازه‌هایی که مشتق منفی است، یعنی تابع نزولی است.

x		x_1		x_2	
f'	$+$	$\cdot$	$-$	$\cdot$	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

روش حل مسئله

۱) اول از تابع مشتق بگیرید.
۲) معادله $f'(x)=0$ را حل کنید و ریشه‌های مشتق را به دست آورید.
۳) با توجه به ریشه‌ها، مشتق را تعیین علامت کنید. (ممکن است احتیاج به جدول داشته باشید.)
۴) در هر بازه‌ای که علامت مشتق مثبت باشد یعنی تابع $f(x)$ صعودی است. و در هر بازه‌ای که علامت مشتق منفی باشد یعنی تابع $f(x)$ نزولی است.

۱۰۹) در چه بازه‌ای تابع $f(x)=3x^2-18x$ صعودی است؟

☑پاسخ:

$$f(x)=3x^2-18x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=6x-18=0 \quad\Rightarrow\quad x=3$$

x		$x=3$	
f'	$-$	$\cdot$	$+$

تابع در بازه‌ی $(-\infty,3)$ نزولی و در بازه‌ی $(3,+\infty)$ صعودی است.

۱۱۰) تعیین کنید تابع $f(x)=2x-\sqrt{x}$ در کدام بازه نزولی است

☑پاسخ:

یعنی باید بازه ای را تعیین کنیم که مشتق تابع در این بازه همواره منفی باشد.

$$f'(x)=2-\frac{1}{2\sqrt{x}}<0 \;\Rightarrow\; 2<\frac{1}{2\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; \sqrt{x}<\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; x<\frac{1}{16} \xrightarrow{\text{با توجه به دامنه}} 0\le x<\frac{1}{16}$$

۱۱۱) تابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ را روی بازه‌ی $(0,+\infty)$ در نظر بگیرید. صعودی یا نزولی بودن این تابع را روی بازه ی $(0,+\infty)$ تعیین کنید .

☑پاسخ:

$$f(x)=\frac{1}{x^2} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{-2x}{x^4}=\frac{-2}{x^3} \quad\Rightarrow\quad \forall\in(0,+\infty) \quad f'(x)<0$$

بنابراین در بازه $(0,+\infty)$ تابع نزولی است.

۱۱۲) تابع $f(x)=\frac{2}{x}+x^2$ در چه فاصله‌ای صعودی است؟

☑پاسخ:

$$f(x)=\frac{2}{x}+x^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{-2}{x^2}+2x=\frac{2(x^3-1)}{x^2}\ge 0 \;\Rightarrow x^3-1\ge 0 \;\Rightarrow x\ge 1$$

اکسترمم های نسبی

نقاط بحرانی

نقطه ی $x=a$ متعلق به دامنه تابع را نقطه بحرانی تابع f می نامند هرگاه در یک همسایگی متقارن پیرامون این نقطه تابع تعریف شده باشد و مشتق تابع در این نقطه صفر یا وجود ندارد ، شود .

$$\begin{cases} 1) & a\in D_f \\ 2) & f'(a)=0 \quad \vee \quad f'(a) \ \text{وجود ندارد} \end{cases}$$

برای به دست آوردن نقاط بحرانی تابع با توجه به دامنه از تابع مشتق می گیریم و می پرسیم f' کجا صفر می شود یا کجا وجود ندارد .

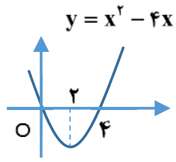
انواع وجود ندارد : الف کجا ناپیوسته است ب) کجا مشتق چپ وراست نابرابرند ج) کجا مشتق بی نهایتی می شود .

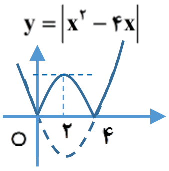
۱۱۳) نقاط بحرانی تابع با ضابطه ی $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ را به دست آورید .

$$D_f=R \ , \ f'(x)=\frac{3x^2-6x}{3\sqrt[3]{\left(x^3-3x^2\right)^2}} \Rightarrow \begin{cases} f'=0 & 3x^2-6x=3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0 \ , \ x=2 \\ f' \ \text{وجود ندارد} & x^3-3x^2=x^2(x-3)=0 \Rightarrow x=0 \ , \ x=3 \end{cases}$$

مجموعه نقاط بحرانی : $\{0,2,3\}$

۱۱۴) نمودار تابع $f(x)=\left|x^2-4x\right|$ رسم کنید و نقاط بحرانی تابع را تعیین کنید .





$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x & x<0 \\ -\left(x^2-4x\right) & 0\le x\le 4 \\ x^2-4x & x>4 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & x<0 \\ -(2x-4) & 0\le x\le 4 \\ 2x-4 & x>4 \end{cases}$$

در این نقطه مشتق صفر است $f'(x)=0 \Rightarrow -(2x-4)=0 \Rightarrow x=2$

در $x=4, x=0$ مشتق وجود ندارد

$$\begin{cases} f'_-(0)=-4 \ , \ f'_+(0)=4 \\ f'_-(4)=-4 \ , \ f'_+(4)=4 \end{cases}$$

این نقاط زاویه دارند .

تابع سه نقطه بحرانی دارد . $\{0 \ , \ 2 \ , \ 4\}$

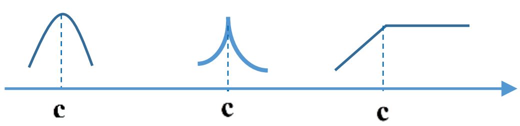
با توجه به تعریف نقاط ابتدا و انتهای بازه نقاط بحرانی تابع نیستند .

واژه اکسترمم نسبی برای ماکسیمم و مینیمم تابع بکار برده می شود که تعاریف آنها به شرح زیر است .

نقطه $x=c$ طول ماکسیمم نسبی تابع f است که اولاً در یک همسایگی متقارن این نقطه تابع تعریف شده باشد ، و ثانیا عرض این نقطه از تمامی عرض های این همسایگی بزرگتر یا مساوی است . به زبان ریاضی یعنی :

$$1) \ \forall x\in(c-\delta,c+\delta)\Rightarrow f(c)\ge f(x)$$

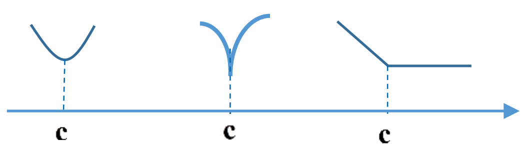
در این حالت $f(c)$ را مقدار ماکسیمم نسبی تابع f می نامند .



نقطه $x=c$ طول مینیمم نسبی تابع f است که اولاً در یک همسایگی متقارن این نقطه ، تابع تعریف شده باشد ، و ثانیاً عرض این نقطه از تمامی عرض های این همسایگی کوچکتر یا مساوی است . به زبان ریاضی یعنی :

$$2) \ \forall x\in(c-\delta,c+\delta)\Rightarrow f(c)\le f(x)$$

در این حالت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می نامند .



نقاط ابتدا و انتهای بازه نمی توانند اکسترمم نسبی باشند زیرا تابع در همسایگی متقارن آن ها تعریف نشده .

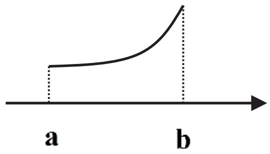
قضیه فرما: اگر در نقطه ی $x=a$ تابع $f(x)$ ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد ، و $f'(a)$ موجود باشد آنگاه $f'(a)=0$ خواهد بود به عبارت دیگر هر نقطه اکسترمم نسبی تابع یک نقطه بحرانی آن است ولی عکس قضیه فرما در حالت کلی درست نیست .

ماکسیمم مطلق : اگر $x=a$ نقطه ای از دامنه تابع به طوری که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(a)\geq f(x)$ یعنی عرض نقطه a از تمامی عرض های این تابع در تمام دامنه بزرگتر یا مساوی باشد . آنگاه $f(a)$ ماکسیمم مطلق تابع f می نامیم

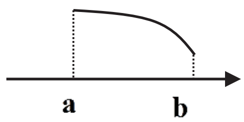
مینیمم مطلق : اگر $x=a$ نقطه ای از دامنه تابع به طوری که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(a)\leq f(x)$ یعنی عرض نقطه a از تمامی عرض های این تابع در تمام دامنه کوچکتر یا مساوی باشد . آنگاه $f(a)$ مینیمم مطلق تابع f می نامیم .

در توابع یکنوا به راحتی ماکسیمم و مینیمم مطلق را می توان تعیین نمود .

$$\text{if}\quad \forall x\in(a,b)\quad f'(x)>0 \quad\Rightarrow\quad f\uparrow \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y_{max}=f(b)\\ y_{min}=f(a)\end{cases}$$



$$\text{if}\quad \forall x\in(a,b)\quad f'(x)<0 \quad\Rightarrow\quad f\downarrow \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y_{max}=f(a)\\ y_{min}=f(b)\end{cases}$$



هر تابع پیوسته در بازه ای بسته ماکسیمم و مینیمم مطلق دارد .

برای تعیین $\min,\max$ مطلق تابع پیوسته $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ ابتدا نقاط بحرانی تابع را تعیین کرده و جدو ل زیر را تنظیم می کنیم .

x	$a \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 ....x_n \quad b$
$f(x)$	$f(a) \quad f(x_1) \quad f(x_2) \quad f(x_3)..............f(x_n) \quad f(b)$

سطر اول نقاط بحرانی تابع در این فاصله و نقاط ابتدا و انتهای بازه و سطر دوم مقادیر تابع به ازای این نقاط می با شد . آنگاه بیشترین مقدار سطر دوم ماکسیمم مطلق و کمترین مقدار سطر دوم مینیمم مطلق تابع در این بازه خواهد بود .

۱۱۵) بیشترین مقدار تابع $y = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x + ۵$، در بازه‌ی $[-۲,۲]$، کدام است؟

ابتدا از تابع مشتق می گیریم و نقاط بحرانی را تعیین و مقادیر تابع به ازای این نقاط را به دست می آوریم . عرض نقاط بحرانی تابع را بازه ی $(-۲,۲)$

$$f = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x + ۵ \Rightarrow f' = ۳x^۲ - ۶x - ۹ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \Rightarrow & f(-۱) = -۱ - ۳ + ۹ + ۵ = ۱۰ \\ x = ۳ \notin (-۲,۲) \end{cases}$$

عرض تابع را در نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه به دست می آوریم.داریم:

$$\begin{cases} f(-۲) = -۸ - ۱۲ + ۱۸ + ۵ = ۳ \\ f(۲) = ۸ - ۱۲ - ۱۸ + ۵ = -۱۷ \end{cases}$$

درآخر بین مقادیر به دست آمده ،بیشترین مقدار را به عنوان ماکزیمم مطلق تابع در این بازه معرفی می کنیم:

x	-۲	-۱	۲
$f(x)$	۳	۱۰	-۱۷

$$y_{max} = ۱۰$$

۱۱۶) ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = |x|(x+۱)$ در فاصله $[-۲,۱]$ را به دست آورید .

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + x & x > ۰ \\ -x^۲ - x & x \le ۰ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲x + ۱ & x > ۰ & \Rightarrow ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲} & \text{غ ق ق} \\ \text{موجود نیست} & x = ۰ \\ -۲x - ۱ & x < ۰ & \Rightarrow -۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲} & \text{ق ق} \end{cases}$$

x	-۲	$\frac{-۱}{۲}$	۰	۱
$f(x)$	-۲	$\frac{۱}{۴}$	۰	۲
	مینیمم مطلق			ماکزیمم مطلق

۱۱۷) به ازای چه مقادیر a و b نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}-۱\\ ۲\end{matrix}\right.$ min تابع $y = x^۲ + ax + b$ می‌باشد؟

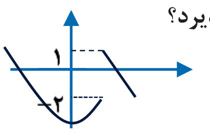
پاسخ : اگر یک نقطه اکسترمم یک تابع چند جمله ای خطی باشه اولاً باید مختصاتش در ضابطه تابع صدق کنه و ثانیاً طول این نقطه باید مشتق اول تابع رو صفر کنه .

$$y' = ۲x + a = ۰ \Rightarrow x = \frac{-a}{۲} = -۱ \Rightarrow a = ۲$$

$$f(-۱) = ۱ - ۲ + b = ۲ \Rightarrow b = ۳$$

> در توابع نا پیوسته در حالت کلی نمی توان از نکته فوق برای تعیین ماکسیمم و مینیمم مطلق استفاده نمود ، و بهتر است نمودار تابع ، مورد بررسی قرار گیرد .

۱۱۸) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۳ & ;x < ۱ \\ a & ;x = ۱ \\ ۳ - ۲x & ;x > ۱ \end{cases}$ در $x = ۱$ ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی داشته باشد، a چند مقدار صحیح را نمی‌تواند بپذیرد؟



پاسخ با توجه به شکل داریم :

$$\left.\begin{matrix} (\text{ماکزیمم نسبی}) \; x = ۱ \Rightarrow a \ge ۱ \\ (\text{مینیمم نسبی}) \; x = ۱ \Rightarrow a < -۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \in R - [-۲,۱)$$

پس a سه مقدار صحیح ۲− و ۱− و ۰ را نمی‌تواند بپذیرد.

بهینه سازی

روش حل مسئله

روش کلی بهینه سازی :

۱- در صورت نیاز ترسیم شکل برای درک بهتر مسئله . (به خصوص هنگامی که ایده ی اولیه ندارید)

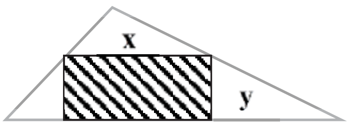
۲- ایجاد رابطه بین معلومات و مجهولات مسئله و فرموله کردن آن و تبدیل آن به یک تابع یک متغیره.

۳- پس از تشکیل تابع مسئله ، نقاط بحرانی تابع را تعیین، مقادیر تابع ، به ازاء نقاط بحرانی را به دست می آوریم و با توجه به ماهیت سوال ، ماکزیمم یا مینیمم حاصل از تابع جواب مسئله خواهد بود.

۱۱۹) کم ترین فاصله منحنی $y=x^۲$ از خط $y-۴x+۲=۰$ را به دست آورید ؟

$$h(x)=\frac{|x^۲-۴x+۲|}{\sqrt{۱+۱۶}} \Rightarrow h'(x)=۲x-۴=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow h(۲)=\frac{|۴-۸+۲|}{\sqrt{۱۷}}=\frac{۲}{\sqrt{۱۷}}$$

۱۲۰) اگر قاعده مثلث ۳۶ و ارتفاع آن ۱۲ باشد در شکل مقابل بیشترین مساحت ناحیه هاشور زده کدام ا ست ؟



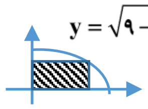
اینجا تالس زدیم

پاسخ

$$\frac{x}{۳۶}=\frac{۱۲-y}{۱۲} \Rightarrow x=۳(۱۲-y) \Rightarrow S=xy \Rightarrow S=۳(۱۲-y)y=۳۶y-۳y^۲$$

$$S'_y=۳۶-۶y=۰ \Rightarrow y=۶ \Rightarrow S_{max}=S_{(y=۶)}=(۳۶)(۶)-۳(۶)^۲=۱۰۸$$

۱۲۱) اگر شعاع ربع دایره ۳ باشد ، بیش ترین مساحت مستطیل محاط شده در شکل را بدست آورید .



پاسخ

$$y=\sqrt{۹-x^۲} \quad , \quad ۰\le x\le ۳$$

$$S(x)=xy=x\sqrt{۹-x^۲} \Rightarrow S'(x)=\sqrt{۹-x^۲}+\frac{-x^۲}{\sqrt{۹-x^۲}}=\frac{۹-۲x^۲}{\sqrt{۹-x^۲}}=۰ \Rightarrow x^۲=\frac{۹}{۲} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۹}{۲}}$$

x	۰	$\sqrt{\frac{۹}{۲}}$	۳
$S(x)$	۰	$\frac{۹}{۲}$	۰

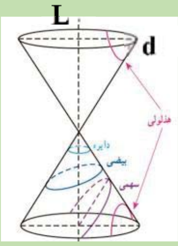
۱۲۲)غلظت یک داروی شیمیایی در خون t ساعت پس از تزریق از رابطه ی $f(t)=\frac{t}{t^۳+۵۴}$ به دست می آید چند ساعت پس از تزریق غلظت آن در خون بیشترین مقدار ممکن را خواهد داشت .

پاسخ

$$f'(t)=\frac{۱\times(t^۳+۵۴)-۳t^۲\times t}{(t^۳+۵۴)^۲}=\frac{-۲t^۳+۵۴}{(t^۳+۵۴)^۲} \Rightarrow f'(t)=۰ \Rightarrow -۲t^۳+۵۴=۰ \Rightarrow t^۳=۲۷ \Rightarrow t=۳$$

فصل ۶ هندسه

اگر خط d را حول محور L (که با آن متقاطع است) دوران دهیم. دو تا مخروط ایجاد می شود که در راس به هم متصل شده اند . حال اگر رویه مخروطی را با صفحه p قطع دهیم . موارد زیر رخ می دهد .



الف) صفحه p بر محور L عمود باشد . دایره حاصل می شود .

ب) صفحه p بر محور L عمود نباشد و موازی مولد d هم نباشد بیضی حاصل می شود .

ج) صفحه p موازی محور L مخروط باشد . هذلولی حاصل می شود .

د) صفحه p موازی مولد d باشد . سهمی حاصل می شود .

ه) صفحه p از راس دو مخروط بگذرد . نقطه حاصل می شود .

اگر کره را با یک صفحه قطع دهیم همواره سطح مقطع دایره خواهد بود .

اگر یک استوانه قائم را با یک صفحه قطع دهیم ممکن است مستطیل ، بیضی ، دایره ایجاد شود .

اگر پاره خطی حول محوری موازی خودش دوران کند سطح استوانه حاصل می شود .

اگر یک مستطیل حول یکی از اضلاعش دوران کند استوانه ساخته می شود .

اگر یک مربع یا لوزی حول یک قطر خود دوران کند دو مخروط حاصل می شود .

۱۲۳)جا های خالی را با عبارات مناسب پر کنید .

۱ – شکل حاصل از دوران یک ربع دایره حول شعاع عمود بر قطر آن یک .... است .

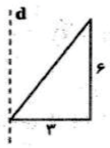
۲ – شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه ....است .

۳ – شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن .... است .

۴ – اگر یک لوزی با طول قطر های ۶ و ۴ را حول قطر بزرگ آن دوران دهیم حجم شکل حاصل .... است .

۱) نیمکره ۲) مخروط ۳) دو مخروط هم قاعده ۴) دو مخروط هم قاعده به حجم 8π

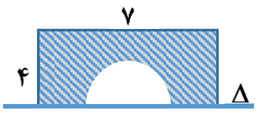
۱۲۴) اگر مثلث قائم الزاویه شکل روبرو را حول خط d دوران دهیم حجم شکل حاصل را به دست آورید .



با این دوران حجم حاصل عملا تفاضل حجم استوانه از مخروط خواهد بود.

$$\underbrace{V}_{\text{حجم مورد نظر}} = \underbrace{Vo}_{\text{حجم استوانه}} - \underbrace{V_m}_{\text{حجم مخروط}} = \pi(۳)^۲(۶) - \frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲(۶) = ۳۶\pi$$

۱۲۵)در شکل مقابل حجم حاصل از دوران شکل ، حول خط Δ هنگامی که قطر نیم دایره ۴ باشد را به دست آورید.



با این دوران حجم حاصل عملاً تفاضل حجم استوانه ای با شعاع ۴ و ارتفاع ۷ و یک کره با شعاع ۲ خواهد بود .

$$\underbrace{V}_{\text{حجم مورد نظر}} = \underbrace{Vo}_{\text{حجم استوانه}} - \underbrace{V_k}_{\text{حجم کره}} = \pi(۴)^۲(۷) - \frac{۴}{۳}\pi(۲)^۳ = \pi(\frac{۳۰۴}{۳})$$